Aufgabensammlung
Grundbegriffe der Topologie

Roland Steinbauer, Michael Kunzinger

Sommersemester 20015 (Version 18. Februar 2015)

Die vorliegende Aufgabensammlung dient als Grundlage für die *Übungen zu ,,Grundbegriffe der Topologie"*, die die gleichnamige Vorlesung begleiten. Die Übungen und die Vorlesung bilden eine untrennbare Einheit: der behandelte Stoff ist identisch, es laufen bloß die beiden jeweils passenden Teile des Lernprozesses in der Vorlesung bzw. in den Übungen ab. Ein Verständnis der einschlägigen Begriffe kann daher nur auf der Basis beider Veranstaltungen entstehen.

Die Aufgaben sind eng an den Ablauf der Vorlesung angepasst; die Kapitelnummerierung entspricht der der Vorlesung. Die Aufgabensammlung enthält eine Mischung aus „Routinebeispielen" (kürzer, weniger anspruchsvoll) und längeren, aufwendigeren Aufgaben, die zum Teil auch offen formuliert sind; speziell (aber nicht nur) für letztere empfiehlt sich ein Nachschlagen in der entsprechenden Literatur (für einen Überblick siehe die Literaturliste auf der Vorlesungshomepage) und/oder Gruppenarbeit.

1 Anschluss an die Analysis Vorlesungen. Metrische Räume 1 – die Grundlagen

1. *Bild vs. Urbild.*
   Seien X und Y Mengen mit jeweils mindestens 2 Elementen und $f : X \to Y$ eine Funktion.
   (i) Für beliebige Familien von Teilmengen $(B_i)_{i\in I}$ von Y zeige, dass das Urbild der Vereinigung (des Durchschnitts) der B_i gleich der Vereinigung (dem Durchschnitt) der Urbilder der B_i ist. Kurz gesagt zeige:
   $$f^{-1}(\bigcup_i B_i) = \bigcup_i f^{-1}(B_i) \quad \text{und} \quad f^{-1}(\bigcap_i B_i) = \bigcap_i f^{-1}(B_i).$$
   (ii) Für beliebige Familien von Teilmengen $(A_i)_{i\in I}$ von X bearbeite die analogen Fragestellungen für die Bilder. Nötigenfalls erzwinge die Gleichheit durch eine geeignete Bedingung an f.
   (iii) Für je zwei Teilmengen von X bzw Y vergleiche das (Ur)Bild der Mengendifferenz mit der Differenz der (Ur)bilder. Welche Eigenschaften von f führen zur Gleichheit.
   (iv) Führe das analoge Spiel für das Komplement einer Menge in X bzw Y durch; genauer vergleiche das (Ur)Bild des Komplements mit dem Komplement des (Ur)Bilds. Gegebenenfalls stelle wiederum die Gleichheit mittels geeigneter Bedingungen an f her.
   (v) Vergleiche eine Teilmenge von X mit dem Urbild ihres Bildes und eine Teilmenge von Y mit dem Bild ihres Urbilds. Gegebenenfalls ...

2. *Normen auf* $\mathbb{R}^n$ *(vgl. Vo. Bsp. 1.4(i),(ii)).*
   Zeige, dass die folgenden Beispiele tatsächlich Normen auf $\mathbb{R}^n$ sind.
   (i) $(\mathbb{R}^n, \|\ \|_1)$ wobei $\|x\|_1 := \sum_{i=1}^n |x_i|$ (ii) $(\mathbb{R}^n, \|\ \|_\infty)$, wobei $\|x\|_\infty := \max_{1\le i\le n} |x_i|$.
   (iii) $(\mathbb{R}^n, \|\ \|_p)$, wobei $\|x\|_p := \Big(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\Big)^{1/p}$ $(1 < p < \infty)$.
   Hinweis: Die Dreiecksungleichung ist genau die Minkowskische Ungleichung. Stöbere diese in der Literatur auf und verschaffe dir einen Überblick über ihre(n) Beweis(e).

3. $\| \ \|_2$ *für Funktionen.*
Sei $[a,b]$ ein abgeschlossenes Intervall in $\mathbb{R}$. Zeige, dass
$$\|f\|_2 := \sqrt{\int_a^b f(t)^2\,dt}$$
eine Norm auf $\mathcal{C}^0[a,b] := \{f : [a,b] \to \mathbb{R} \,|f \text{ stetig}\}$ ist. Ist $\| \ \|_2$ auch eine Norm auf der Menge $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}) := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,|f \text{ stetig}\}$.
Hinweis: Hier muss die Cauchy Schwarz'sche Ungleichung für Integrale herangezogen werden. Stöbere diese in der Literatur auf und verschaffe dir einen Überblick über ihre(n) Beweis(e).

4. *Beispiele metrischer Räume (vgl. Vo. Bsp. 1.4(iii),(iv)).*
   (i) Zeige, dass auf jeder nichtleeren Menge M
   $$d(x,y) := \begin{cases} 0, & x = y \\ 1, & x \neq y. \end{cases} \tag{1}$$
   eine (die sogenannte diskrete) Metrik definiert.
   (ii) Zeige, dass jeder normierte Vektorraum $(V, \| \ \|)$ vermöge
   $$d(x,y) := \|x - y\| \tag{2}$$
   zu einem metrischen (Vektor-) Raum wird.

5. *Norm vs. Metrik.*
Stammt *jede* Metrik auf einem Vektorraum V (im Sinne von Gleichung (2) in Bsp. 4(ii)) von einer Norm ab? Salopp gefragt: Gibt es mehr normierte oder mehr metrische Vektorräume, d.h. welcher der Begriffe ist allgemeiner?
(*Tipp:* Wie steht es mit der diskreten Metrik auf $\mathbb{R}$?)

6. *Eigenschaften offener Mengen.*
Zeige, dass in einem metrischen Raum (X,d) folgendes gilt
   (i) X und $\emptyset$ sind offen.
   (ii) Beliebige Vereinigungen offener Mengen sind offen.
   (iii) Endliche Durchschnitte offener Mengen sind offen.

   Zeige durch ein explizites Gegenbeispiel (in einem möglichst einfachen metrischen Raum), dass beliebige Durchschnitte offener Mengen nicht offen sein müssen.

7. *Eindeutigkeit des Grenzwerts.*
Sei $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ im metrischen Raum (X,d). Zeige, dass x eindeutig bestimmt ist.
Hinweis: Indirekt angenommen $x = \lim_{n\to\infty} x_n = y$ dann folgt schon $y = x$.

8. *Charakterisierung stetiger Funktionen mittels Folgen.*
Beweise folgenden Satz aus der Analysis: Eine Abbildung $f : (X, d_x) \to (Y, d_y)$ zwischen metrischen Räumen ist genau dann stetig in $x \in X$ ist, falls für jede Folge $x_n \to x$ in X die Bildfolge $f(x_n)$ in Y gegen $f(x)$ konvergiert.

9. *Häufungswerte mittels Umgebungen.*
Ein Punkt x im metrischen Raum (X,d) heißt *Häufungswert* der Folge (x_n), falls
$$\forall \varepsilon > 0 \ \forall N \in \mathbb{N} \ \exists n \geq N : \ d(x_n, x) < \varepsilon. \tag{3}$$
Charakterisiere diesen Begriff mittels Umgebungen, formuliere also den Begriff Häufungswert in der Sprache der Topologie (vgl. Vo. 1.19).